THE BASIC FEATURES OF EINSTEIN EQUATIONS WITH COSMOLOGICAL TERM, WHICH LINEARLY DEPENDENTS FROM THE SPACE-TIME RIEMANN CURVATURE SCALAR

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА С КОСМОЛОГИЧЕСКИМ ЧЛЕНОМ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩИМ ОТ СКАЛЯРА РИМАНОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

S.I.Vil'chinsky[1], P.A.Nakaznoy[2]

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
[1]*sivil@univ.kiev.ua*, [2]*nak@univ.kiev.ua*

ABSTRACT. The model of variable cosmological term, which linearly dependents from the space-time Riemann curvature scalar is proposed. The basic features of such model: Friedmann equations, their solutions, its asymptotic forms, energy integrals for each kind of matter, newton limit is considered. Especially we have tried to describe observation data of galaxies rotation curves without recourse of dark matter. The positive and negative aspects of this method of attack is reviewed.

АННОТАЦИЯ. Рассматриваются основные свойства уравнений Эйнштейна с переменным космологическим членом, который предполагается линейно зависимым от скаляра римановой кривизны. Анализируются положительные и отрицательные свойства такого подхода для дальнейших попыток моделирования темной материи и темной энергии.

Key words: variable cosmological term, dark energy, dark matter, rotation curves.

1. Введение

Фундаментальным вопросом современной теоретической физики является интерпретация данных последних наблюдений, указывающих на преобладание во Вселенной вещества неизвестной природы, которое разделяют на темную энергию и темную материю ([1]-[5]) (Таблица №1). Здесь применены стандартные обозначения: $\Omega_i = \dfrac{\rho_i}{\rho_c}$ — безразмерная плотность, $\rho_c = \dfrac{3{H_0}^2}{8\pi G} = (0.6 \pm 0.1) \times 10^{-29}\, \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$ — современное значение критической плотности, $H_0 = 72 \pm 10\, \dfrac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпс}}$ — современное значение постоянной Хаббла. Для полной плотности материи во Вселенной получено [3]

Таблица 1: Современный состав Вселенной, полученный из данных наблюдений в рамках стандартной космологической модели (ΛCDM)

тип материи	безразмерная плотность Ω
темная энергия	$\Omega_{\Lambda 0} = 0.7 \pm 0.1$
темная материя	$\Omega_{\mathcal{D}0} = 0.3 \pm 0.1$
барионная материя	$\Omega_{\mathcal{B}0} = 0.04 \pm 0.02$
излучение	$\Omega_{\mathcal{R}0} = 0.8 \cdot 10^{-5}\alpha, 1 < \alpha < 30$

$$\Omega = 1.02 \pm 0.02.$$

Темную энергию обычно связывают с космологическим Λ-членом в уравнениях Эйнштейна, представляющим собой вклад тензора энергии-импульса вакуума в их правую часть:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \varkappa T_{ik} + \Lambda\, g_{ik}, \quad \Lambda g_{ik} = \varkappa T_{ik}^{vac}. \quad (1)$$

Так как удовлетворительного вычисления Λ-члена в рамках квантовой теории поля не существует ([6]-[9]) его существование, как правило, ограничивается феноменологическим учетом в уравнениях Эйнштейна и ΛCDM космологической постоянной со значением $\Omega_{\Lambda 0}$ ([10], [11]). Важным исключением служат модели с переменным в пространстве-времени Λ-членом [12]. На его динамическую природу имеется несколько указаний. Теория инфляции предсказывает для него громадные значения на инфляционной стадии [13]. Кроме того фазовые переходы вакуума при спонтанном нарушении симметрии также дают большой вклад в значение Λ-члена ([6], [13]).

Поэтому логичным будет допустить изменение космологического члена во времени, а именно его уменьшение в процессе эволюции Вселенной ([14], [15]). Таким образом плотность энергии вакуума при расширении Вселенной также будет уменьшаться, как и плотности энергии других сортов материи ([16], [17]).

визны Вселенной служит скаляр римановой кривизны $R = g^{ik}R_{ik}$, где R_{ik} — тензор Риччи. Поэтому в простейшем случае переменный космологический член будет линейно зависеть от R [18]:

$$\Lambda = \Lambda_0 - kR \ , \tag{2}$$

где Λ_0 и k – параметры модели.

Необходимо подчеркнуть, что параметр Λ_0 может включать в себя геометрическую космологическую постоянную Эйнштейна, а слагаемое, пропорциональное кривизне можно интерпретировать как отклик вакуума на свое искривление. В таком подходе параметр k обретает смысл "упругости" пространства-времени[1].

Зависимость (2) была впервые рассмотрена в работе [18] и является обобщением модели $\Lambda = -kR$, предложенной П.И.Фоминым [15] в рамках теории квантового рождения Вселенной ([14]-[15], [20]-[23]).

В данной работе рассматриваются положительные и отрицательные аспекты применения модели (2) для описания темной энергии и материи.

2. Проблема темной энергии

Уравнения Эйнштейна (1) для модели (2) принимают следующий вид:

$$R_{ik} - \alpha g_{ik} R = \varkappa T_{ik} + \Lambda_0\, g_{ik}, \tag{3}$$

где $\alpha = \dfrac{1}{2} - k$.

Заметим, что из уравнения (3) и тождества $\nabla^k(R_{ik} - \dfrac{1}{2} g_{ik}R) = \nabla^k(\varkappa T_{ik} - kR g_{ik}) = 0$. Таким образом для модели (2) имеет место "сохранение" лишь полного тензора энергии-импульса: $\tilde{T_{ik}} = T_{ik} + T^{vac}_{ik}$, где $\varkappa T^{vac}_{ik} = (\Lambda_0 - kR) g_{ik} \equiv (\varkappa\lambda_0 - kR) g_{ik}$. Тензор энергии-импульса отдельно взятой материи не сохраняется:

$$\nabla^k T_{ik} = -\beta \nabla_i T, \tag{4}$$

где $\beta = \dfrac{k}{1-4k}$.

Из (3) следует выражение для Λ - члена

$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{k}{1-4k}\left(\varkappa T + 4\Lambda_0\right),$$

подстановка которого в уравнения Фридмана для плоской Вселенной ([16], [17])

$$\begin{cases} \dot{a}^2 = \frac{1}{3}\varkappa c^2(\varepsilon + \lambda)a^2 \\ \ddot{a} = -\frac{1}{6}\varkappa c^2(\varepsilon + 3p - 2\lambda)a \end{cases}$$

фактора

$$\begin{cases} \dot{a}^2 = \dfrac{\varkappa c^2}{1-4k}\left(\left(\dfrac{1}{3} - k\right)\varepsilon - kp + \dfrac{\lambda_0}{3}\right)a^2 \\ \ddot{a} = -\dfrac{\varkappa c^2}{1-4k}\left(\left(\dfrac{1}{6} - k\right)\varepsilon + \left(\dfrac{1}{2} - k\right)p - \dfrac{\lambda_0}{3}\right)a, \end{cases} \tag{5}$$

где $a(t)$ масштабный фактор в метрике Фридмана-Робертсона-Уолкера, ε и p соответственно плотность энергии и давление материи, $\lambda = \dfrac{\Lambda}{\varkappa}$, $\lambda_0 = \dfrac{\Lambda}{\varkappa}$.

Из (5) следует соотношение, указывающее на несохранение энергии данного сорта вещества:

$$\varepsilon a^{\sigma} = \varepsilon_0 a_0^{\sigma}, \quad \sigma = \frac{3(1-4k)(1+\nu)}{1-3k(1+\nu)}, \tag{6}$$

где $\nu = \dfrac{p}{\varepsilon}$ — параметр уравнения состояния вещества, $a_0 = \dfrac{c}{H_0} \sim 10^{28}$ см — хаббловский радиус, ε_0 — современное значение плотности энергии.

С помощью (6) можно найти интеграл системы (5)

$$\tau = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{\frac{1-3k}{1-4k}(\Omega_{\mathcal{D}0} + \Omega_{\mathcal{B}0})\ y^{-\frac{1-6k}{1-3k}} + \frac{\Omega_{\mathcal{R}0}}{y^2} + \frac{\Omega_0}{1-4k}y^2}}\,, \tag{7}$$

где $x = \dfrac{a}{a_0}$, $\tau = tH_0$, $\Omega_0 = \dfrac{\Lambda_0}{\varkappa\rho_c\, c^2}$.

Для предельных значений x из (7) получим соответственно параболический и деситтеровский режимы расширения [16]:

$$\begin{cases} x \ll 1 \Rightarrow x(\tau) = (\Omega_{\mathcal{R}0})^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\tau} \\ x \gg 1 \Rightarrow x = x_0 e^{\eta\tau},\ \eta = \sqrt{\dfrac{\Omega_0}{1-4k}}\ . \end{cases}$$

Для безразмерной плотности Λ - члена найдем:

$$\Omega_{\Lambda} \equiv \frac{\Lambda}{\varkappa\rho_c c^2} = \frac{\Omega_0}{1-4k} + \frac{k}{1-4k}\ (\Omega_{\mathcal{D}0} + \Omega_{\mathcal{B}0})\ x^{-\frac{3(1-4k)}{1-3k}}.$$

[1] Идеологию упругости пространства-времени в контексте проблемы космологического члена впервые предложил Сахаров [19].

3. Проблема темной материи

Впервые гипотеза о существовании темной материи была выдвинута для интерпретации наблюдений кривых вращений галактик [24]. Проблема здесь, как известно, заключается в том, что для объектов, расположенных в пределах гало, скорость вращения не спадает с расстоянием до центра галактики r согласно ньютоновской механике как

$$v^2 \sim \frac{GM}{r},$$

где M — масса галактики, а остается постоянной или возрастает по закону $v \sim \sqrt{r}$ ([25], [26]). В частности для спиральных галактик установлен феноменологический закон Талли-Фишера [27]

$$v_* \propto M^{1/4}, \tag{8}$$

определяющий соотношение между полной массой (светимостью) галактики и максимальной скоростью ее вращения.

Согласно гипотезе о существовании темной материи, вокруг каждой галактики имеется так называемое гало из холодной темной материи с радиусом, превышающим на порядок видимый размер галактики. Масса сферически симметричного сегмента темной материи возрастает по линейному закону и, таким образом, скорость вращения в поле галактики не зависит от расстояния до ее центра.

Другим способом разрешения проблемы интерпретации кривых вращений галактик является модификация ньютоновской механики, прежде всего второго закона Ньютона и общей теории относительности ([28] – [30]).

Модель переменного космологического члена также приводит к модификации уравнений Эйнштейна (3) и, как следствие, второго закона Ньютона.

Исследуем ньютоновское приближение уравнений (3). Прежде всего заметим, что из (4) в ньютоновском приближении получается соотношение, несогласующееся с уравнением непрерывности [31]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = -\beta\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{9}$$

В ньютоновском приближении, как известно, [32]

$$R_0{}^0 = \frac{1}{c^2}\Delta\varphi,\ T_0{}^0 = T = \varepsilon = \rho c^2,$$

где φ — гравитационный потенциал. Отсюда, используя (3), получим уравнение для гравитационного потенциала (уравнение Пуассона):

$$\Delta\varphi = 4\pi G\frac{1-6k}{1-4k}\rho - \frac{c^2\Lambda_0}{1-4k}\ . \tag{10}$$

Слагаемое, пропорциональное Λ_0, очевидно, несущественно в ньютоновском приближении. Однако из (10) следует, что при $k \neq 0$ происходит перенормировка гравитационной постоянной. Эта общая черта моделей с плотностью энергии вакуума пропорциональной плотности материи [33].

Найдем уравнение движения частицы в поле φ. Уравнение (4) для тензора энергии-импульса идеальной жидкости [32] $T_{ik} = (\varepsilon + p)\,u_i\,u_k - pg_{ik}$, приобретает вид

$$\nabla^k\left[(\varepsilon+p)\,u_i\,u_k - pg_{ik}\right] = -\beta\,\partial_i(\varepsilon - 3p).$$

Спроектируем полученное уравнение на ортогональные 4-вектора u^i и $g^{il} - u^i u^l$:

$$\begin{cases}\nabla_i(\varepsilon u^i) + p\nabla_i u^i = -\beta u^i\partial_i(\varepsilon - 3p)\\ (\varepsilon+p)u^k\nabla_k u^i = (g^{ik} - u^i u^k)\nabla_k\left[p - \beta(\varepsilon - 3p)\right].\end{cases}$$

В ньютоновском приближении из первого уравнения опять вытекает нарушение уравнения непрерывности (9), а со второго — искомая модификация второго закона Ньютона:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \approx -\vec{\nabla}\varphi + \beta c^2\frac{\vec{\nabla}\rho}{\rho}. \tag{11}$$

Таким образом эффективное ускорение частицы в гравитационном поле будет содержать дополнительное слагаемое, которое можно интерпретировать как силу, действующую в сторону градиента плотности вещества. Даже с учетом априорной малости параметра k, коэфициент пропорциональности $k\,c^2$ при логарифмической производной от плотности материи опровергает рассмотренную теорию, так как она не содержит в себе как предельный случай второй закон Ньютона, а, следовательно, не согласовывается с классической механикой[2].

Интересно заметить, что аномальное ускорение, являющееся недостатком при описании макроскопического мира, позволяет удовлетворительным образом описать наблюдаемые кривые вращения галактик без привлечения гипотезы о темной материи.

Поверхностная яркость спиральных галактик приближенно описывается эмпирическим экспоненциальным законом [34]

$$i(r) = i_0\exp(-\frac{r}{r_0}), \tag{12}$$

где i_0 и r_0 параметры галактики. Считая светимость и массу пропорциональными для объектов, расположенных за видимыми границами галактики, т.е $r \gg r_0$ с (11) и (12) найдем:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r} + \frac{\beta c^2}{r_0}. \tag{13}$$

[2]На этот недостаток модели (2) и его связь с интерпретацией кривых вращения галактик впервые указал Ю.В.Штанов (частное сообщение)

Начиная с расстояния $r_* = \sqrt{\dfrac{GMr_0}{\beta c^2}}$ постоянное слагаемое в формуле (13) начинает доминировать над спадающим ньютоновским потенциалом. Расстоянию r_* отвечает скорость вращения $v_* = \left(\dfrac{\beta c^2 GM}{r_0}\right)^{1/4}$, что согласовывается с законом Талли-Фишера (8). При $r > r_*$ из (13) вытекает увеличение скорости v по закону

$$v(r) \approx v_* \sqrt{\frac{r}{r_*}}.$$

В завершение рассмотрим произвольную функциональную зависимость космологического члена от скаляра римановой кривизны:

$$\Lambda = f(R)\, g_{ik}\ . \tag{14}$$

После расчетов, аналогичных вышеизложенным, можно убедиться в том, что дополнительное ускорение частицы в поле гравитационного потенциала φ будет иметь следующий вид:

$$\vec{a} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\vec{\nabla} f(R)}{\rho} = c^2 \frac{\vec{\nabla} F(\rho)}{\rho}\ , \tag{15}$$

где $F(\rho)$ имеет размерность плотности. В последнем равенстве учтена связь между скаляром римановой кривизны R и сверткой тензора энергии-импульса вещества T, следующая из уравнений Эйнштейна.

Для согласования модели (14) со вторым законом Ньютона и данными наблюдений вращений галактик $F(\rho)$, очевидно, должна удовлетворять, как минимум, двум условиям. Дополнительное ускорение (15) должно быть одного порядка с гравитационным $-\nabla\varphi$ для небольших астрофизических плотностей вещества ρ и обращаться в ноль для бóльших значений ρ:

$$\begin{cases} c^2 \dfrac{\nabla F(\rho)}{\rho} \sim \dfrac{GM}{r^2},\ \rho \sim \rho_c \\ c^2 \dfrac{\nabla F(\rho)}{\rho} \ll \dfrac{GM}{r^2},\ \rho \gg \rho_c . \end{cases}$$

4. Выводы

Предложенная модель линейно зависимого от скаляра римановой кривизны пространства-времени космологического члена позволяет удовлетворительно описать резкое уменьшение плотности энергии вакуума на начальных стадиях эволюции Вселенной и кривые вращения галактик. Хотя при этом остается много концептуальных и технических вопросов, таких как детальное фиттирование параметров модели из данных наблюдений, описание флуктуаций анизотропии реликтового излучения и гравитационного линзирования, возможное физическое проявление несохранения энергии и нарушения уравнения непрерывности, главным ее недостатком, безусловно, является аномалия во втором законе Ньютона, описывающим эффективное ускорение частицы в гравитационном поле с учетом взаимодействия с физическим вакуумом.

Однако изучение данной модели позволяет утверждать, что отказ от нее не должен сопровождаться отказом от всего направления. Действительно, выглядела бы излишне самоуверенной надежда на то, что первая рассмотренная простейшая модель позволит разрешить фундаментальный вопрос современной физики. В дальнейшем необходимо рассмотреть более сложные модели и провести более детальное сопоставление с результатами современных наблюдений. Лишь после этого можно будеть делать выводы об адекватности концепции переменного космологического члена к описанию Вселенной.

Благодарности. Авторы признательны Ю.В.Штанову за предоставленные расчеты, которые были использованы в этой работе.

Литература

[1] Riess A.G. et al.: 1998, *Astron. J.*, **116**, 1009.

[2] Perlmutter S. et al.: 1999, *Astrophys. J.*, **517**, 565.

[3] Spergel D.N. et al.: astro-ph/0603449.

[4] Page L. et al.: astro-ph/0603450.

[5] Чернин А.Д.: 2001, *УФН*, **171**, N 11, 1153.

[6] Weinberg C.S.: 1989, *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 1-23.

[7] Peebles P.J., Ratra B.: astro-ph/0207347.

[8] Birrell N.D., Davies P.C.W.: 1982, *Quantum Fields in Curved Space* Cambridge University Press.

[9] Shapiro I.L., Sola J.: gr-qc/0611055.

[10] Maroto A.L., Ramirez J.: astro-ph/0409280.

[11] Lesgourgues J.: astro-ph/0409426.

[12] Dymnikova I. *Variable Cosmological Constant – Geometry and Physics*, arXiv: gr-qc/0010016.

[13] Линде А.Д.: 1990, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*, Москва: Наука.

[14] Фомин П.И.: 1973, *препринт ИТФ АН УССР, Киев, итф-73-137р.*

[15] Фомин П.И.: 1975, *ДАН УССР №9*, 831-835.

[16] Weinberg S.: 1972, *Gravitation and Cosmology* (J.Wiley and Sons, Inc.).

[17] Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.: 1975, *Строение и эволюция Вселенной*, Москва, Наука.

[18] Fomin P.I., Nakaznoy P.A., Vilchinskyi S.I.: gr-qc/0509042.

[19] Сахаров А.Д.: 1967, *ДАН СССР*, **177**, 70.

[20] Fomin P.I.: 1988, *Proc. 4-th seminar on quantum gravity, Singapore: World Scientific*, p.813.

[21] Фомин П.И.: 1990, *Проблемы физической кинетики и физики твёрдого тела*, Киев, Наукова думка, с.387.

[22] Фомин П.И.: 1986, *Проблемы теоретической физики*, Киев, Наукова думка, с.285.

[23] Фомин П.И., Штанов Ю.В., Барабаш О.В.: 2000, *Доповідi НАН України*, **10**, 80.

[24] Einasto J.: astro-ph/0401341.

[25] Sahni V.: astro-ph/0403324.

[26] Roy D.P.:physics/0007025.

[27] Tully R.B., Fisher J.R.: 1977, *A&A*, **54**, 661.

[28] Moffat J.F.: gr-qc/9411006, 0202012, 0506021, astro-ph/0412195.

[29] Milgrom M.: 1983, *Astroph. J.*, **270**, 365, 371, 384.

[30] Bekenstein J.D.: astro-ph/0701848.

[31] Lightman A.P. et al.: 1975, *Problem Book in Relativity and Gravitation*, Princeton University Press.

[32] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.: 1988, *Теория поля*, Москва, Наука.

[33] Зельдович Я.Б.: 1981, *УФН*, **133**, №3, 479-503.

[34] King I.R.: 1994, *An Introduction to Classical Stellar Dynamics*, Berkeley: University of California.