DETERMINATION OF AES ORBIT ELEMENTS USING MIXED DATA
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ИСЗ ПО СМЕШАННЫМ ДАННЫМ

S.Ja.Kolesnik, S.L.Strakhova

Odessa Astronomical Observatory, Odessa National University
T.G.Shevchenko Park, Odessa 65014 Ukraine, *astro@paco.odessa.ua*

ABSTRACT. An algorithm is worked out and a program is compiled for a determination of AES (artificial Earth satellite) orbit elements using both goniometrical and range-finder observations of different precision. The observations of one or several passages carried out from one or several stations can be used. A number of observational stations and a number of observations are not limited in principle.

When solving this task the AES ephemerides on the moments of observations are calculated for different sets of orbit elements. A parameter F is considered which is a function of orbit elements. The parameter presents a square-mean deviation of AES ephemeris position on the moments $\{t_i\}$ from its observed one. The determination of real orbit elements comes to minimizing of parameter F by orbit elements using a method of deformed polyhedron.

When calculating the ephemeris the amendments for 2-d, 3-d, 4-th geopotential zone harmonics are considered.

РЕЗЮМЕ. Разработан алгоритм и составлена программа определения элементов орбиты ИСЗ с использованием как позиционных, так и дальномерных наблюдений различной точности. Могут быть использованы наблюдения одного или нескольких прохождений ИСЗ, выполненные как на одной станции, так и с разных станций. Число станций наблюдения и число наблюдений в принципе не ограничены.

В процессе решения поставленной задачи вычисляются эфемериды ИСЗ на моменты наблюдений $\{t_i\}$ для различных наборов элементов орбиты. Введен в рассмотрение параметр F, который является функцией элементов орбиты и представляет собой среднеквадратичное отклонение эфемеридных положений ИСЗ в моменты $\{t_i\}$ от их наблюдённых значений. Вычисление истинных элементов орбиты сводится к минимизации параметра F по элементам орбиты методом деформируемого многогранника.

При вычислении эфемерид ИСЗ учтены поправки за 2-ю, 3-ю и 4-ю зональные гармоники геопотенциала.

1. Вычисление функционала невязок

Для реализации указанных требований не могут быть применены классические методы, использующие малое количество высокоточных наблюдений (Дубошин, 1968; Эскобал, 1970). Нами определялись элементы оскулирующей орбиты ИСЗ на момент пересечения восходящего узла. Поскольку при малых значениях эксцентриситета аргумент перигея ω становится неопределённым, в наших вычислениях применялся набор параметров

$$(a; e\cdot\cos\omega; e\cdot\sin\omega; \Omega; i; t_\Omega) \qquad (1)$$

В методике реализована возможность вычислять эфемериды ИСЗ на моменты наблюдений $\{t_i\}$ для любого набора элементов орбиты (1).

Пусть выбран некоторый набор (1). Для каждого угломерного наблюдения, соответствующего моменту t_i, может быть вычислен орт $\overrightarrow{e_i^H}$ направления "наблюдатель-ИСЗ"; с другой стороны, по набору (1) вычисляется эфемеридный вектор $\overrightarrow{\rho_i^E}$ "наблюдатель-ИСЗ". Назовём невязкой i-го угломерного наблюдения (тангенциальной невязкой) d_i^τ расстояние от эфемеридного положения спутника до луча зрения "наблюдатель-ИСЗ", определяемого положением наблюдателя и ортом $\overrightarrow{e_i^H}$. Тогда

$$d_i^\tau = \left|\overrightarrow{\rho_i^E} \times \overrightarrow{e_i^H}\right|. \qquad (2)$$

Аналогично, для дальномерного наблюдения, выполненного в момент t_j, известно топоцентрическое расстояние спутника ρ_j^H (наклонная дальность). Вычислим на момент t_j эфемеридное значение ρ_j^E и составим невязку дальномерного наблюдения d_j^ρ(радиальную невязку) по формуле

$$d_j^\rho = \left|\rho_j^E - \rho_j^H\right|. \qquad (3)$$

Обе невязки (d_i^τ и d_j^ρ) имеют размерность длины.

Назовём функционалом невязок взвешенную сумму квадратов всех невязок:

$$F = \frac{1}{P}\left(\sum_i p_i(d_i^\tau)^2 + \sum_j p_j(d_j^\rho)^2\right), \qquad (4)$$

где P – сумма весов всех наблюдений.

2. Минимизация функционала невязок

Если выбранный набор (1) совпадает с истинными значениями элементов орбиты, то невязки d_i^τ, d_j^ρ принимают минимальные значения, близкие к ошибкам наблюдений, и функционал невязок F принимает также минимальное значение.

Итак, для определения истинных значений элементов орбиты необходимо минимизировать функционал F по всем шести элементам орбиты (1). Минимизация выполнялась методом деформируемого многогранника (метод Нелдера-Мида) (Химмельблау, 1975). Для выбора начальных точек минимизации вычислялись элементы ближайшей круговой орбиты

$$(a; \Omega; i; t_\Omega). \qquad (5)$$

3. Проблема выбора начальных точек

При вычислении элементов круговой орбиты применялся также метод Нелдера-Мида с четырьмя переменными (5). При некоторых начальных наборах (5) имеет место сходимость к локальным минимумам, далёким от оптимальной круговой орбиты. Поэтому минимизация функции $F(a; \Omega; i; t_\Omega)$ производилась многократно из различных начальных точек; в качестве элементов оптимальной круговой орбиты выбирался набор (5), соответствующий самому глубокому минимуму. Начальные точки выбирались в узлах трёхмерной сетки, содержащей:

5 значений радиуса орбиты: $a = 6300 + 300 \cdot k_a$ (км), где $k_a = 1, .., 5$;

18 значений долготы восходящего узла: $\Omega = (k_\Omega - 1) \cdot 20^\circ$, где $k_\Omega = 1, ..., 18$;

5 значений наклонения: $i = k_i \cdot 30^\circ$, где $k_i = 1, .., 5$.

Начальное значение времени прохождения восходящего узла t_Ω грубо принималось равным времени первой наблюдённой точки t_1 и уточнялось в процессе минимизации.

Как и при поиске круговой орбиты, при вычислении эллиптической орбиты проблема ложных локальных минимумов разрешалась путём увеличения числа начальных точек минимизации. Не меняя Ω, i, которые достаточно уверенно определяются уже на круговой орбите, мы выбирали начальные значения a, e, ω в узлах трёхмерной сетки: $a = R - 400$ км, R, $R + 400$ км, где R – радиус найденной круговой орбиты; $e = 0.02, 0.05, 0.10$; $\omega = (k_\omega - 1) \cdot 45^\circ (k_\omega = 1, ..., 8)$. Кроме того, производилась минимизация непосредственно от параметров круговой орбиты. Оптимальным набором элементов орбиты считался набор (1), для которого значение F – наименьшее.

4. Вычисление эфемерид, учёт зональных гармоник геопотенциала

Точность эфемерид, вычисляемых на моменты наблюдений по наборам элементов орбиты (1), должна соответствовать точности наблюдений, то есть ошибка на интервале времени порядка одних-двух суток не должна превышать нескольких метров. Поэтому при вычислении эфемерид учитывалась не только 2-я зональная гармоника геопотенциала, но также 3-я и 4-я зональные гармоники. Таким образом, потенциал гравитационного поля Земли рассматривался в виде

$$U = \frac{k^2}{r}\left(1 + \frac{c_{2,0}a_0^2}{r^2}P_{2,0}(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \frac{c_{3,0}a_0^3}{r^3}P_{3,0}(\sin\varphi) + \frac{c_{4,0}a_0^4}{r^4}P_{4,0}(\sin\varphi) + ...\right), \qquad (6)$$

где k^2 – постоянная поля тяготения Земли, $_0$ – средний экваториальный радиус Земли, r – расстояние ИСЗ до центра Земли, φ – геоцентрическая широта ИСЗ, $P_{n,0}(\sin\varphi)$ — сферические функции (зональные гармоники). Уравнения движения ИСЗ во второй экваториальной системе координат имеют вид:

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}; \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}; \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (7)$$

Для учёта поправок за счёт 2-й, 3-й и 4-й зональных гармоник нами был выбран простейший вариант прямого решения системы (7) методом Рунге-Кутта 4-го порядка (Калиткин, 1978). Начальными условиями для системы (7), преобразованной в систему 6-и дифференциальных уравнений 1-го порядка, служат положение и скорость ИСЗ на момент прохождения восходящего узла орбиты, вычисленные по набору элементов орбиты (1).

Исследование численного решения показало, что при шаге порядка 2^s ошибка даже на интервале порядка 1-2 суток не превышает нескольких метров, что соответствует точности регистрации положения ИСЗ. В частности, вычисляя с помощью квадратичного интерполирования положение и скорость объекта в конце каждого витка при пересечении восходящего узла и определяя по этим данным новые элементы орбиты, мы простым вычитанием старых элементов из новых находим драконический период обращения T_Ω, а также изменения элементов орбиты за виток: $\delta a, \delta e, \delta\Omega, \delta\omega$. Эти величины обнаружили хорошее совпадение с их теоретическими значениями из (Жонголович, 1960) (до четвёртой - пятой значащих цифр). Таким образом, изменения орбиты за целое число витков могут быть найдены теоретически по формулам из (Жонголович, 1960).

Заметим, что значения T_Ω, вычисленные двумя способами, различаются на величину до $0^s.05$; причина этого в том, что при выводе теоретического значения T_Ω в (Жонголович, 1960) не учтены слагаемые, содержащие $(c_{2,0})^2, c_{3,0}, c_{4,0}$. Поэтому значения T_Ω для 4-мерной сетки (a, e, Ω, i) были табулированы и в дальнейшем определялись квадратичной интерполяцией.

Численный расчёт орбиты для каждого набора (1) занимает достаточно много машинного времени. Поэтому такой расчёт выполняется лишь для начальной точки минимизации, после чего определяются поправки

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}^{calk} - \vec{r}^{Kepl} \tag{8}$$

по отношению к соответствующей кеплеровской орбите. Для остальных наборов орбита вычислялась приближённо прибавлением поправки (8) к новой кеплеровской орбите. Возникающие ошибки при этом достаточно малы, что позволяет определять оптимальную орбиту методом итераций. Процесс итераций заключается в том, что после окончания минимизации с предварительными значениями поправок и определения элементов орбиты, поправки (8) вычисляются с найденными элементами орбиты и минимизация повторяется.

5. Результаты расчётов, обсуждение

Определение элементов орбиты по реальным наблюдениям производилось только по угломерным данным. Во всех случаях метод демонстрировал хорошую сходимость к оптимальным элементам орбиты. Среднеквадратичная ошибка одной точки $(F_{min})^{1/2}$ примерно соответствовала ошибке угломерных наблюдений. Например, для среднего расстояния до ИСЗ в 700-900 км ошибка в две угловые минуты соответствует линейной ошибке порядка 400-500м, чему примерно и равнялось значение $(F_{min})^{1/2}$ в оптимальной точке. Для более подробной проверки работоспособности данной методики производились модельные расчёты для орбит с эксцентриситетами от 0.001 до 0.1. При этом вычислялись эфемериды ИСЗ для некоторого набора (1) элементов орбиты, затем по этим данным восстанавливались элементы орбиты с помощью описанного алгоритма. Во всех случаях итеративный процесс достаточно быстро (за 2-3 итерации) сходился к исходным элементам орбиты.

Заметим, что точность определения элементов орбиты (и особенно большой полуоси) существенно повышается при использовании данных по двум и более прохождениям; точность повышается также при использовании данных, полученных с разных станций наблюдения.

Литература

Дубошин Г.Н.: 1968, *Небесная механика. Основные задачи и методы*, М., Наука.

Эскобал П.: 1970, *Методы определения орбит*, М., Мир.

Химмельблау Д.: 1975, *Прикладное линейное программирование*, М., Мир.

Калиткин Н.Н.: 1978, *Численные методы*, М., Наука.

Жонголович И.Д.: 1960, *Бюлл. Института Теор. Астрономии*, **VII**, N 10(93), 743.